

Le statistiche

Alcuni modelli per la rappresentazione dei dati

Scheda 4

Gli abbandoni scolastici

[0. Introduzione](#)

[1. Formule per elaborare dati - Termini numerici](#)

[2. Grafi di flusso, equazioni, incognite](#)

[3. Esercizi](#)

[➔ Sintesi](#)

0. Introduzione

In questa scheda ci soffermeremo su alcuni modi per descrivere (mediante variabili, simboli di operazione e parentesi; mediante opportune rappresentazioni grafiche) le relazioni che intercorrono tra dati diversi e su alcuni procedimenti per trasformarli.

Vedremo anche che la relazione tra un valore da calcolare e altri valori noti può avere formulazioni diverse che, pur essendo equivalenti dal punto di vista "algebrico", non sono tali dal punto di vista della "esecuzione del calcolo".

1. Formule per elaborare dati - Termini numerici

La tabella (1.1) contiene i dati relativi alle iscrizioni alle classi di un Istituto Tecnico Industriale (ITI) in due anni scolastici consecutivi.

	a.s. 2016/17		a.s. 2017/18	
	totale iscritti	ripetenti	totale iscritti	ripetenti
	A	B	C	D
classe 1 ^a	181	81	154	36
classe 2 ^a	146	38	126	35
classe 3 ^a	245	48	140	37
classe 4 ^a	263	31	197	22
classe 5 ^a	234	4	232	1

E' una tabella in cui le righe sono indicate da numeri e le colonne da lettere, con una notazione simile a quella impiegata spesso nelle piantine delle città. Così il numero degli iscritti alla 1^a nell'a.s. 2016/17 è contenuto nella casella (o cella) A1, il numero degli iscritti alla 4^a nell'a.s. 2017/18 che ripetono l'anno è contenuto nella cella D4, Con la stessa notazione della cella indichiamo anche il dato in essa contenuto. Ad esempio A1 è il numero degli iscritti alla 1^a nel 2016/17.

La tabella (1.2) contiene dati analoghi relativi a un Liceo Scientifico (LS).

	a.s. 2016/17		a.s. 2017/18	
	totale iscritti	ripetenti	totale iscritti	ripetenti
	A	B	C	D
classe 1 ^a	149	25	152	27
classe 2 ^a	128	18	129	20
classe 3 ^a	135	10	111	10
classe 4 ^a	120	7	124	4
classe 5 ^a	125	2	115	1

In ogni cella è contenuto il medesimo tipo di informazione presente nella corrispondente cella della tabella (1.1), anche se il valore numerico dell'informazione cambia da una scuola all'altra. Ad esempio A3 rappresenta in entrambi i casi il numero degli iscritti alla 3^a nel 2016/17, ma in un caso A3 vale 245, nell'altro vale 135.

In altre parole A3 è una **variabile**. In genere le variabili sono indicate con una lettera eventualmente seguita da altre lettere o da cifre o altri simboli particolari: abbiamo visto vari esempi nelle schede precedenti, altri li vedremo in seguito (*parte*, *totale*, *x*, *y*, *dato1*, *dato2*, *n*, *v_andata*, *x'*, *n.dat*, *ValoreIniziale*, ...).

Anche C4 e D4 sono variabili; rappresentano rispettivamente il numero complessivo degli iscritti alla 4^a nel 2017/18 e il numero di quelli ripetenti. L'espressione C4-D4 è un termine che indica il risultato della sottrazione di D4 da C4, rappresenta cioè il numero di iscritti alla 4^a che non sono ripetenti.

1 Scrivi delle espressioni che indichino come ottenere (a partire da una delle precedenti tabelle) i seguenti valori:

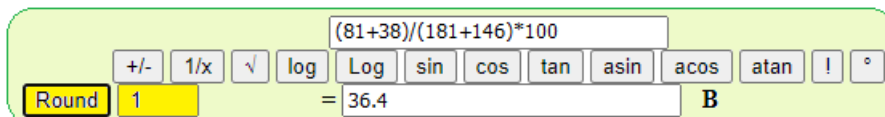
- il n° dei ripetenti iscritti alla 2^a nel 2016/17:
- il n° degli iscritti alla 2^a nel 2016/17 che non sono ripetenti:
- il rapporto tra il n° degli iscritti alla 2^a non ripetenti e il totale degli iscritti alla 2^a nel 2016/17
- il rapporto tra gli iscritti alla 5^a nel 2016/17 e il totale degli iscritti alla scuola:

2 Viceversa, descrivi a parole il significato dei seguenti termini (cioè il tipo di informazione che si può ottenere con essi a partire dalle tabelle)

- C5
- C5-D5
- (C5-D5)/C5
- C3/(C1+C2+C3+C4+C5)

- 3 Individua i valori numerici dei seguenti termini per ciascuna delle due scuole e indica quali rappresentano l'incidenza percentuale del fenomeno della ripetenza al 1° anno.
- $B1/A1 \cdot 100$ ITI: LS:
 - $B1/(A1 \cdot 100)$ ITI: LS:
 - $(B1/A1) \cdot 100$ ITI: LS:
- 4 Sia p la percentuale degli iscritti al 1° biennio nel 2016/17 che sono ripetenti, cioè sia:
 $p = (B1+B2)/(A1+A2) \cdot 100$. Sai riscrivere questa formula ($p = \dots$) senza usare parentesi?
- 5 Se con la "[piccola CT](#)" calcoli $(81+38)/(181+146) \cdot 100$ e arrotondi il risultato ai decimi ottieni 36.4. Quale era il risultato esteso? Calcola e arronda analogamente $(25+18)/(149+128) \cdot 100$. Che cosa rappresentano le due percentuali ottenute?

Possiamo fare i calcoli direttamente anche con la "[grande CT](#)":

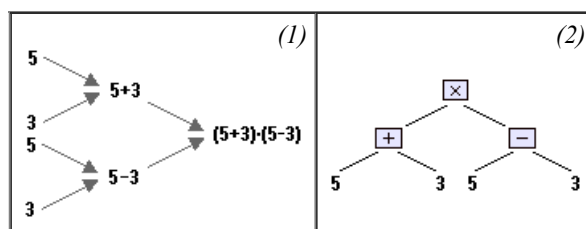


Ricordiamo che un **termine** (*numerico*) è un'espressione "costruita" a partire da variabili e costanti attraverso l'*applicazione di funzioni* ("4 operazioni", radice quadrata, elevamento a potenza, cambio-segno, valore assoluto, ...). In analogia con la chimica (in cui l'atomo è la più piccola parte di un elemento che conserva le proprietà chimiche dell'elemento stesso), costanti e variabili vengono chiamate anche **atomi**.

Ad esempio se alle costanti 5 e 3 applico la addizione o la sottrazione ottengo i termini $5+3$ e $5-3$; se a questi termini applico la moltiplicazione ottengo il termine $(5+3) \cdot (5-3)$. Non ho scritto $5+3 \cdot 5-3$ ma ho racchiuso tra parentesi i termini $5+3$ e $5-3$ in modo da chiarire che la moltiplicazione era applicata ad essi nella loro interezza, non solo a 3 e 5.

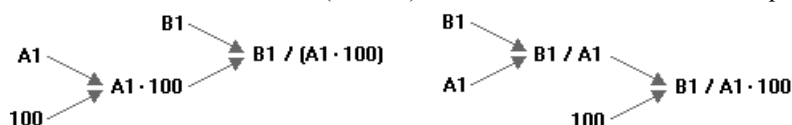
Le parentesi servono per delimitare all'interno di un termine i "pezzi" che ne rappresentano dei **sottotermini**, cioè i termini di cui dobbiamo calcolare il valore per ottenere il valore del termine complessivo: $(5+3) \cdot (5-3)$ viene **interpretato** come la moltiplicazione avente per termini $5+3$ e $5-3$: dobbiamo prima calcolare il valore di ciascuno di questi sottotermini e poi calcolare il valore del termine complessivo.

La struttura di un termine può essere visualizzata mediante schemi come i seguenti (chiamati "*grafi ad albero*") relativi al termine $(5+3) \cdot (5-3)$:



Lo schema (1) illustra la *costruzione* del termine a partire dai suoi atomi. Lo schema (2) è una *descrizione* del termine $(5+3) \cdot (5-3)$ che esplicita soltanto gli atomi e le funzioni impiegate per costruirlo.

Gli schemi seguenti illustrano la differenza dei termini $B1/(A1 \cdot 100)$ e $B1/A1 \cdot 100$, considerati nel ➡ quesito 3.



- 6 Se con la "[piccola CT](#)" calcoli: $20 - 1 / 4$ $(20 - 1) / 4$ $20 - (1 / 4)$
in quali casi ottieni lo stesso valore? Perché?

Come sai, quando i sottotermini non sono evidenziati da parentesi, l'ordine di esecuzione viene stabilito con ulteriori regole. Ad esempio:

- 1 $5+3 \cdot 5$ viene interpretato come $5+(3 \cdot 5)$, cioè come la addizione applicata ai termini 5 e $3 \cdot 5$; non bisogna calcolare il valore di $5+3$ per ottenere il valore finale: $5+3$ non è da intendere come un sottotermine di $5+3 \cdot 5$
- 2 $A1/B1 \cdot 100$ viene interpretato come $(A1/B1) \cdot 100$
- 3 $\frac{10}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100}$ viene interpretato come $(\frac{10}{100} + \frac{30}{100}) - \frac{20}{100}$
- 4 $3+10^{2+4}$ viene interpretato come $3+(10^{2+4})$, non come $(3+10)^{2+4}$
- 5 un passivo di 1 milione può essere indicato con -10^6 ; infatti -10^6 viene interpretato come $-(10^6)$, non come $(-10)^6$, che invece vale $(-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) \cdot (-10) = 10^6$ (ogni moltiplicazione per un numero negativo cambia il segno, quindi alla fine si ottiene un risultato positivo), cioè rappresenta un attivo di 1 milione.

In alcuni casi (esempi 2 e 3) si procede dando la precedenza alla prima operazione incontrata, in altri casi la precedenza viene stabilita diversamente. Più precisamente:

(1.3) Si stabiliscono i seguenti livelli di **priorità tra le operazioni**:

- elevamento a potenza
- moltiplicazione e divisione

- 10** Completa la seconda trasformazione in analogia alla prima, in cui si sono trasformate le sottrazioni in addizioni per poi poter effettuare un riordino:

$$\sqrt{5} - 4 - x + 7 \rightarrow \sqrt{5} - 4 - x + 7 \rightarrow 3 + \sqrt{5} - x$$

$$-13 - 9 + 113 + 79 \rightarrow \dots + \dots + \dots + \dots \rightarrow \dots + \dots + (\dots + \dots) \rightarrow 113 - 13 + (79 - 9)$$

QUIZ 1

(Z)

(A) $7 - \frac{15}{60}$ (B) $7 - \frac{15}{60}$ (C) $\frac{7}{15 - 60}$

(Z) --> (A) | (B) | (C) ?

(Z) -->

11 Cliccando [QUI](#) accedi ad alcuni esercizi (sui *grafi ad albero*) simili a quello rappresenato qui a sinistra. Prova ad affrontarli.

2. Grafi di flusso, equazioni, incognite

Abbiamo visto (➡ quesito 3) che nel 2016/17 nelle prime dell'ITI il 44.8% erano ripetenti, contro il 16.8% del liceo.

Queste percentuali non consentono di dare una valutazione adeguata del fenomeno degli insuccessi scolastici. Ad esempio nel caso delle classi 1^e dell'ITI:

- sarebbe opportuno tener conto di quanti erano gli iscritti in 1^a nell'anno precedente: se nel 2015/16 gli iscritti alla 1^a fossero molto più dei 181 del 2016/17, gli 81 ripetenti costituirebbero una percentuale di bocciati inferiore al 44.8%;
- inoltre occorrerebbe tener conto di quanti dei bocciati in 1^a nel 2015/16 non si sono ri-iscritti.

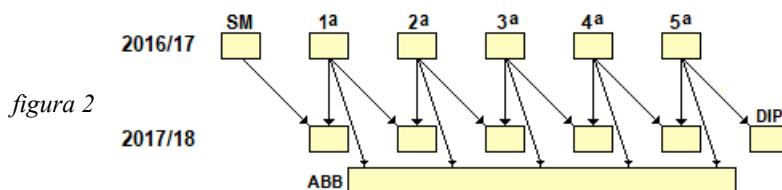
Cerchiamo di elaborare delle informazioni più significative, che tengano conto dei flussi di alunni da una classe all'altra e degli abbandoni.

Consideriamo l'ITI. Supponiamo, per semplicità, che nei due anni scolastici considerati nessuno studente si sia trasferito in un'altra scuola secondaria superiore e che non si siano iscritti studenti provenienti da altre scuole secondarie superiori.

Degli iscritti alla 1^a nell'a.s. 2016/17 alcuni sono stati promossi in 2^a, alcuni sono stati bocciati e ripetono la 1^a nel 2017/18, altri ancora, promossi o bocciati, non si sono ri-iscritti nel 2017/18: *hanno abbandonato* la scuola. Un fenomeno analogo si verifica per gli altri anni di corso.

La figura 2 illustra il *flusso degli alunni tra il 2016/17 e il 2017/18*.

Il riquadro SM indica l'insieme degli alunni che nel 2016/17 frequentavano la scuola media inferiore e che nel 2017/18 sono diventati nuovi alunni dell'ITI. Il riquadro DIP indica l'insieme dei ragazzi che alla fine del 2016/17 hanno superato positivamente l'esame finale di 5^a, cioè che da alunni si sono trasformati in diplomati. Il riquadro ABB indica coloro che nel 2017/18 non si sono iscritti all'ITI pur non avendo concluso gli studi, cioè coloro che hanno abbandonato. Gli altri riquadri indicano le varie classi.



Un diagramma di questo genere viene chiamato **grafo di flusso**. I vari riquadri vengono detti **nodi**. Le **freccie** che li collegano vengono spesso chiamate **archi**.

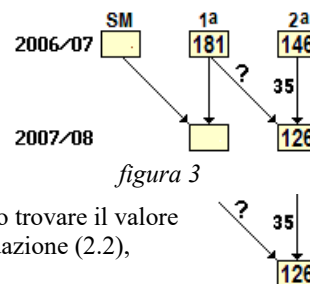
I nodi in cui non arrivano frecce vengono detti **nodi iniziali**, quelli da cui non partono frecce vengono detti **nodi finali**.

Nel nostro caso tutti i riquadri che si riferiscono alla condizione degli alunni nel 2016/17 sono nodi iniziali mentre quelli che si riferiscono alla condizione nel 2017/18 (compresi ABB e DIP) sono nodi finali (se estendessimo il grafo considerando anche l'anno scolastico 2018/19 i nodi relativi al 2017/18 non sarebbero più finali perché da essi partirebbero frecce verso i nodi relativi all'anno successivo).

Vogliamo quantificare i flussi di alunni, cioè mettere in ciascun riquadro il numero degli alunni che si trovano nella condizione indicata e mettere a fianco di ogni freccia il numero di alunni che passano dalla condizione di partenza alla condizione di arrivo. La ➡ tabella (1.1) ci fornisce i valori corrispondenti solo ad alcuni riquadri e ad alcune frecce. Vediamo se è possibile determinare i valori mancanti.

Iniziamo cercando qual è il numero degli studenti che, nel periodo considerato, vengono *promossi dalla 1^a alla 2^a*.

Possiamo completare il grafo di flusso come in figura 3 (cioè mettere nei nodi e a fianco delle frecce i valori che ci sono *noti* dalla tabella (1.1)) e cercare di individuare il valore del particolare flusso che ci interessa (passaggio dalla 1^a alla 2^a), cioè il valore da mettere al posto del "?".



Poiché il valore associato a un nodo è la somma dei valori associati alle frecce che vi arrivano, dobbiamo trovare il valore che nella seguente equazione (2.1) occorre sostituire a "?", ovvero quello che occorre sostituire a x nell'equazione (2.2), affinché la relazione che esse esprimono sia verificata (ossia resa **vera**).

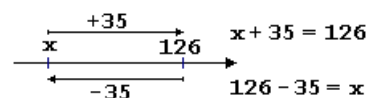
$$(2.1) \quad ? + 35 = 126$$

$$(2.2) \quad x + 35 = 126$$

Ricordiamo che un'**equazione** è una espressione del tipo: *termine1=termine2*. *termine1* e *termine2* vengono chiamati, rispettivamente, *primo* e *secondo termine* [o *membro*] dell'equazione.

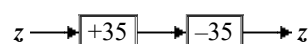
Possiamo descrivere il nostro problema dicendo che dobbiamo *risolvere l'equazione (2.2) rispetto a x* . La variabile impiegata per indicare il valore da trovare viene detta **incognita**. Il valore trovato viene chiamato **soluzione** dell'equazione.

Questa equazione può essere trasformata facilmente nella forma $x = \dots$:
 come evidenzia la figura a fianco, $x + 35 = 126$ equivale a $126 - 35 = x$, ossia a $x = 126 - 35$.



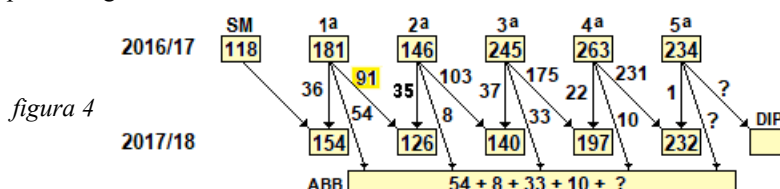
Posso vedere ciò anche come un caso particolare della equivalenza tra $a+b=c$ e $a=c-b$.

Posso anche dire: per *isolare* la variabile x devo annullare "+35" (cioè la funzione $x \mapsto x + 35$) e per ottenere ciò trasformo l'equazione applicando a entrambi i suoi membri l'*operazione inversa* "-35" ($x \mapsto x - 35$):



- (1) $x + 35 = 126$ ← equazione iniziale
- (2) $x + 35 - 35 = 126 - 35$ ← ho applicato "-35"
- (3) $x = 126 - 35$ ← la funzione "+35" è stata annullata dalla funzione inversa "-35"
- (4) $x = 91$ ← ho effettuato i calcoli numerici

In modo analogo posso completare il grafo ottenendo:



Le informazioni di cui disponiamo non ci consentono di individuare i valori indicati con "?".

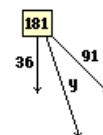
Vediamo, in particolare come è stato calcolato il numero degli *studenti che nel 2016/17 erano iscritti alla 1ª e nel 2017/18 non si sono più iscritti a scuola*, cioè che hanno abbandonato gli studi, cioè il numero 54.

Devo trovare il numero y da associare alla freccia che parte dal riquadro [181] e arriva nel riquadro ABB.

Ho già trovato che il valore associato alla freccia che da [181] va in [126] è 91.

Quindi, poiché il valore associato a un nodo è la somma dei valori associati alle frecce che escono da esso, ho:

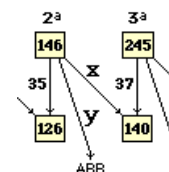
$$181 = 36 + y + 91$$



Cerco di isolare y :

- (1) $181 = 36 + y + 91$ ← equazione iniziale
- (2) $181 = y + 36 + 91$ ← trasformo il 2° membro nella forma $y + \dots$ usando \Rightarrow (1.5)
- (3) $181 = y + 127$ ← effettuo i calcoli numerici
- (4) $181 - 127 = y + 127 - 127$ ← applico "-127"
- (5) $181 - 127 = y$ ← la funzione "+127" è annullata dalla sua inversa "-127"
- (6) $54 = y$ ← effettuo i calcoli numerici
- (7) $y = 54$ ← scambio tra loro i membri dell'equazione

12 Spiega come, in maniera analoga, si possono trovare i valori x ed y considerati nel grafo a fianco.



3. Esercizi

e1 Abbiamo visto che l'uso di variabili e di formule è comodo per *descrivere in forma concisa* (cioè breve) e *precisa un procedimento di calcolo*.

(a) Per poter ottenere alcune agevolazioni economiche nell'iscrizione a una particolare università occorre che il reddito totale annuo della famiglia non sia troppo elevato. Il reddito viene valutato mediante un *indice capitaro* che deve essere inferiore a un certo limite. Nel 2019 sul bando che descrive le modalità per accedere alle agevolazioni veniva così indicato come calcolare l'indice capitaro:

«Prendi il reddito annuo lordo in € (cioè senza escludere quanto versato come imposta), sottrai 6000, dividi per il numero dei componenti della famiglia e infine dividi per 1000»

Se indichiamo con I l'indice capitaro, con R il reddito lordo totale della famiglia e con N il numero dei componenti, *quale* o quali delle seguenti formule traducono il procedimento sopra descritto? *Quanto* vale I secondo le tre formule nel caso di una famiglia di 4 persone con reddito lordo complessivo di 70 000 €?

$$(1) \quad I = \frac{R - 6000}{\frac{N}{1000}}$$

$$(2) \quad I = \frac{R - 6000}{\frac{N}{1000}}$$

$$(3) \quad I = R - \frac{6000}{\frac{N}{1000}}$$

(b) Supponiamo di disporre di una tabella come quella sottostante, che riporti, per vari anni, i seguenti dati: popolazione con età compresa tra 6 e 13 anni (inclusi), popolazione con età compresa tra 6 e 18 anni (inclusi), numero degli studenti iscritti alla scuola elementare o alla scuola media inferiore, numero totale degli studenti iscritti a scuola (esclusa l'università e altre forme di istruzione post-diploma).

	A	B	C	D
anno	6-13 anni	6-18 anni	elem. e media inf.	totale scuola
...

Vogliamo analizzare come è cambiato negli anni il tasso di frequenza alla scuola secondaria superiore, cioè il rapporto tra il numero degli alunni di scuola secondaria superiore e quello dei ragazzi tra i 14 e i 18 anni.

Quale o quali tra le seguenti formule ti permettono di effettuare il calcolo? *Motiva* la risposta esplicitando il significato di ogni sottotermine della formula che hai scelto.

$$(1) \quad \text{TassoFreq} = \frac{D - C}{B - A}$$

$$(2) \quad \text{TassoFreq} = \frac{A - C}{B - D}$$

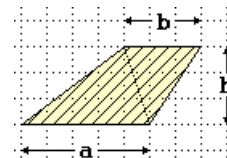
$$(3) \quad \text{TassoFreq} = \frac{B - A}{D - C}$$

e2 L'uso di variabili per rappresentare un procedimento di calcolo consente, a volte, anche di analizzare meglio il procedimento impiegato e di **individuare dei procedimenti equivalenti, ma più semplici**.

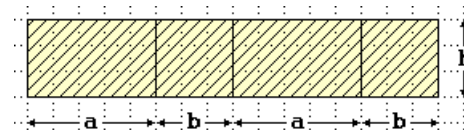
(a) Per calcolare l'area della figura a fianco possiamo sommare le aree dei due triangoli evidenziati, cioè fare $a \cdot h/2 + b \cdot h/2$.

Ma, trasformando i due addendi e raccogliendo a fattor comune il sottotermine $h \cdot (1/2)$, otteniamo:

$$\frac{a \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} = a \cdot h \cdot \frac{1}{2} + b \cdot h \cdot \frac{1}{2} = (a+b) \cdot h \cdot \frac{1}{2} = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$$



Si vuole calcolare l'area complessiva delle pareti di una stanza da tappezzare; nel calcolo non si tiene conto delle porte e delle finestre (infatti si può risparmiare qualche ritaglio di carta ma non dei tratti interi di rotolo). Sotto è raffigurato lo sviluppo piano delle quattro pareti. *Scrivi* una formula che consenta di calcolare l'area a partire dalle dimensioni a , b e h effettuando il minor numero possibile di calcoli. *Motiva* la risposta.



(b) Non sempre è facile trasformare un termine in un termine più semplice da calcolare. Ad esempio, in uno scritto del 1610 (in un'epoca in cui già si usavano nomi per rappresentare numeri generici ma non era ancora studiato e diffuso il calcolo simbolico) un matematico si "porta dietro" per molti passaggi un termine come $(b+c) \cdot k - k \cdot c$ senza accorgersi che (distribuendo k e riordinando) diventa $b \cdot k$:

$$(b+c)k - kc = bk + ck - kc = bk + ck - ck = bk + (ck - ck) = bk + 0 = bk$$

In uno scritto del 1620 il risultato di un problema di geometria è scritto nella forma sotto riportata. Prova a riscriverlo in una forma più semplice (indicando i procedimenti di riscrittura che hai impiegato).

$$V = a(m+n) + m(b-a) - na$$

e3 Un'equazione contenente più variabili permette di descrivere in maniera sintetica le relazioni che intercorrono tra più grandezze.

Spesso, con opportune trasformazioni, è possibile **riscriverla esprimendo una grandezza in funzione di altre**. Ad esempio se α , β e γ sono le misure in gradi degli angoli di un triangolo sappiamo che vale la seguente proprietà: $\alpha + \beta + \gamma = 180$. Da essa possiamo ricavare, ad esempio, α in funzione di β e γ :

$$\alpha + \beta + \gamma = 180 \Leftrightarrow \alpha + (\beta + \gamma) = 180 \Leftrightarrow \alpha = 180 - (\beta + \gamma)$$

(a) Dalla formula che esprime la misura in °F (**f**) in funzione della misura in °C (**c**) ricava la formula inversa (che esprime **c** in funzione di **f**):

$$f = 32 + 1.8c \Leftrightarrow \dots = 1.8c \Leftrightarrow \dots = c \Leftrightarrow c = \dots$$

(b) Considera la prima figura del quesito e2. Esprimi b in funzione di a , h e A :

$$A = (a+b)h/2 \Leftrightarrow 2A = \dots \Leftrightarrow 2A/h = \dots \Leftrightarrow \dots = b \Leftrightarrow b = \dots$$

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:

termine e *atomi* (dopo ques.5), *sottotermine* (dopo ques.5), *grafo di flusso* (§2), *equazione* (dopo fig.3), *incognita* (dopo fig.3), *riordinare una somma* (dopo ques.8).

2) Su un foglio da "quadernone" (che poi inserirai dopo l'ultima pagina della scheda), nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").

script: [piccola CT](#) [grande CT](#) [isto](#) [isto con %](#) [boxplot](#) [striscia](#) [100](#) [60](#) [ordina](#) [Grafici](#) [GrafAdAlbero](#)